25/5/2018

Άσκηση Έστω ότι G είναι μία άπειρη ομάδα. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική, αν και μόνο αν

κάθε υποομάδα της, $H \neq \{e\}$ είναι ισόμορφη με την G.

Λύση ($\Leftarrow$) Κάθε υποομάδα $H \neq \{e\}$ της G, είναι

ισόμορφη με την G.

• Έστω $\alpha \neq e$ στοιχείο της G.

Τότε: $\alpha \in G \Rightarrow \boxed{H = \langle \alpha \rangle \leq G}$

$\Longrightarrow H = \langle \alpha \rangle \cong G \Longrightarrow G$: κυκλική, άπειρης τάξης!

Συγκεκριμένα:

$H \cong G \Rightarrow \exists$ ισομορφισμός $f: H \to G$.

• $H = \langle \alpha \rangle = \{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ισχυριζόμαστε ότι $\boxed{G = \langle f(\alpha) \rangle}$

• Έστω $b \in G$ και f επί $\Rightarrow (\exists \lambda \in H)$ τέτοιο ώστε: $f(\lambda) = b$

$\Rightarrow \lambda \in H = \langle \alpha \rangle \Rightarrow \boxed{\lambda = \alpha^\rho} \Rightarrow f(\alpha^\rho) = b \Rightarrow$

$\Rightarrow b = (f(\alpha))^\rho \Rightarrow \boxed{b \in \langle f(\alpha) \rangle} \Rightarrow \boxed{G = \langle f(\alpha) \rangle}$

- <u>Έστω</u> $\delta \in \langle f(\alpha)\rangle \Rightarrow \delta = (f(\alpha))^k$, $\underline{f(\alpha)\in G}$ $\Big\} \Rightarrow \underline{(f(\alpha))^k \in G} \Rightarrow \boxed{\langle f(\alpha)\rangle \subseteq G}$

- <u>Συνεπώς</u>: $\boxed{G = \langle f(\alpha)\rangle} \Rightarrow \boxed{G: \text{κυκλική}}$

$\Longrightarrow$ $\underline{G: \text{άπειρη}}$ & $\underline{G: \text{κυκλική}}$

- $\underline{G: \text{κυκλική}} \Rightarrow \underline{G = \langle \omega \rangle} \Rightarrow G = \{\underline{\omega^k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

  με $\boxed{ord(\omega) = |G| = \infty}$

- <u>Έστω</u> $\underline{H \neq \{e\}}$, με $\underline{H \leq G}$

  Αφού $\underline{G: \text{κυκλική}} \Rightarrow \boxed{H: \text{κυκλική}}$

  <u>Άρα</u> $\boxed{H = \langle \omega^s \rangle}$

- <u>Θεωρώ</u> την απεικόνιση $\underline{\varphi: G \longrightarrow H}$, με:

$$\boxed{\varphi(\omega^k) = \omega^{k\cdot s}}$$

(i) $\varphi(\alpha\cdot b) \overset{\alpha=\omega^k}{\underset{b=\omega^m}{=}} \varphi(\omega^{k+m}) = \omega^{ks+ms} = \omega^{ks}\cdot\omega^{ms} = \varphi(\omega^k)\cdot\varphi(\omega^m)$

$= \varphi(\alpha)\cdot\varphi(b)$

$\Longrightarrow \boxed{\varphi: \text{ομομορφισμός}}$

(ii) <u>Έστω</u> $y \in H = \langle \omega^s \rangle \Rightarrow y = (\omega^s)^k = \varphi(\omega^k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi: \text{επί}}$

(iii) Έστω $x \in \ker\varphi \subseteq G \Rightarrow \boxed{x = \omega^{z}}$

Τότε: $\varphi(x) = e \Rightarrow \varphi(\omega^{z}) = e \Rightarrow \boxed{\omega^{z\cdot 5} = e}$

$\Rightarrow z = 0$ ή $z \neq 0$

Αν $z \neq 0$, τότε: $\omega^{z\cdot 5} = e \Rightarrow ord(\omega) \mid z\cdot 5$: [illegible]

Άτοπο!

Άρα $z = 0 \Rightarrow x = e \Rightarrow \boxed{\varphi : 1\text{-}1}$

Άρα φ: ισομορφισμός !!!

Άσκηση / Φυλ. 5 Υπολογίστε όλους τους ομομορφισμούς από το $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

- **Λύση**: Θεωρώ την απεικόνιση $\boxed{\varphi(\kappa) = \kappa\cdot\mu}$, $\mu \in \mathbb{Z}$

- $\varphi(\kappa+\lambda) = (\kappa+\lambda)\cdot\mu = \kappa\mu + \lambda\mu = \varphi(\kappa) + \varphi(\lambda)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\varphi : \text{ομομορφισμός}}$

- Άρα έχω άπειρους ομομορφισμούς ομάδων από το $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Κάθε ένας από αυτούς είναι της μορφής $\boxed{\varphi(\kappa) = \kappa\cdot\mu,\ \mu \in \mathbb{Z}}$

Παράδειγμα/Άσκηση: Υπολογίστε όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων, από το $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Λύση: Έχω: $1 \xrightarrow{\varphi} \varphi(1)$

Όμως: $\varphi(1) = \varphi(1\cdot 1) = \varphi(1)\cdot\varphi(1)$

$\Rightarrow \varphi(1)^2 = \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1)(\varphi(1)-1) = 0$ $\quad \frac{\mathbb{Z}\text{ ακέραια}}{\text{περιοχή}}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(1)=0}$ ή $\boxed{\varphi(1)=1}$

- Έστω: $\boxed{\varphi(1)=0} \Rightarrow \boxed{\varphi(\kappa)=0}$ → Προφανώς ομομορφισμός δακτυλίων, καθώς:

$$\begin{cases} \varphi(\kappa+\lambda) = \varphi(\kappa)+\varphi(\lambda) \\ \& \\ \varphi(\kappa\cdot\lambda) = \varphi(\kappa)\cdot\varphi(\lambda) \end{cases}$$

- Έστω: $\boxed{\varphi(1)=1} \Rightarrow \varphi(\kappa)=\kappa$

  - Έχω: $\varphi(\kappa+\lambda) = \kappa+\lambda = \varphi(\kappa)+\varphi(\lambda)$

    Και: $\varphi(\kappa\cdot\lambda) = \kappa\cdot\lambda = \varphi(\kappa)\cdot\varphi(\lambda)$

    $\Rightarrow$ Ομομορφισμός!

- Άρα, μόνο 2 ομομορφισμοί δακτυλίων υπάρχουν, ο ταυτοτικός & ο τετριμμένος

▸ $\boxed{\text{Άσκηση}}$ Ομομορφισμοί ομάδων από $\mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{15}$.

▸ <u>Λύση</u>: $\mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{15}$

$\mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{25}$: <u>κυκλικές</u> $\Rightarrow ord(\varphi(1)) \mid ord(1) = 25$

$\Rightarrow ord(\varphi(1)) \in \{1, 5, 25\}$

<u>Και</u>, από Θ. Lagrange : $ord(\varphi(1)) \mid ord(\mathbb{Z}_{15}) = 15$

$\Rightarrow ord(\varphi(1)) \in \{1, 3, 5\}$

• <u>Αν $ord(\varphi(1)) = 1$</u> $\Rightarrow \varphi(1) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi([k]_{25}) = [0]_{15}}$

• <u>Αν $ord(\varphi(1)) = 5$</u> $\Rightarrow \varphi(1) \in \{[3], [6], [9], [12]\}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_1([k]_{25}) = [3k]_{15}}$, $\boxed{\varphi_2([k]_{25}) = [6k]_{15}}$

$\boxed{\varphi_3([k]_{25}) = [9k]_{15}}$, $\boxed{\varphi_4([k]_{25}) = [12k]_{15}}$

• <u>Εξετάζω</u>, έπειτα, αν οι $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ είναι <u>καλά ορισμένες</u> και <u>ομομορφισμοί</u>!

△ <u>Ομομορφισμοί</u> <u>δακτυλίων</u>, είναι μόνο οι:

$\boxed{\varphi([k]_{25}) = [0]_{15}}$ & $\boxed{\varphi([k]_{25}) = [6k]_{15}}$

<u>Καθώς</u> το <u>$[0]_{15}$</u> & <u>$[6]_{15}$</u> είναι <u>ταυτοδύναμα</u>

<u>στοιχεία</u>!!!

▶ Άσκηση 6 (Φυλ. 7) Έστω R πεπερασμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Υποθέτουμε ότι αν:

$\boxed{\alpha, b \in R \setminus \{0\}} \Rightarrow \boxed{\alpha b \neq 0}$ ~ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.

Δείξτε ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης!

▶ **Λύση**: $R = \{0, \underset{\alpha_0}{\underset{\|}{1}}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

- Έστω $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

- Τα στοιχεία $(\alpha\alpha_0, \alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \ldots, \alpha\alpha_n)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο

→ Έστω $\alpha\alpha_i = \alpha\alpha_j \Rightarrow \alpha(\alpha_i - \alpha_j) = 0 \overset{\alpha \neq 0}{\Longrightarrow} \boxed{\alpha_i = \alpha_j}$.

- Έχουμε: $\{\alpha\alpha_0, \alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n\} \subseteq \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

  με $\alpha\alpha_i \neq 0$ $n+1$ $n+1$

$\Rightarrow \{\alpha\alpha_0, \alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n\} = \{\overset{1}{\overset{\|}{\alpha_0}}, \alpha_1, \ldots \alpha_n\}$

- Άρα, το $\boxed{1 \in \{\alpha\alpha_0, \alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n\}}$

- Συνεπώς, για τυχόν $0 \le t \le n$, έχω: $\boxed{\alpha\alpha_t = 1}$

$\Rightarrow \alpha \cdot \alpha_t \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha \cdot (\alpha_t \alpha) = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha_t \cdot \alpha = 1}$

- Συνεπώς, κάθε στοιχείο του $R \setminus \{0\}$ αντιστρέφεται $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ R: δακτύλιος διαίρεσης!!!

▶ $\boxed{\text{Ασκηση 4,5 | Φυλ. 7}}$ Να προσδιορίσετε τους διαιρέτες του μηδενός & τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

▶ **Λύση**:

$(0,0)$ ×	$(1,0)$
$(0,1)$	$(1,1)$
$(0,2)$	$(1,2)$
$(0,3)$	$(1,3)$

- $(0,1)\cdot(1,0) = (0,0) \Rightarrow (0,1), (1,0)$: μηδενοδιαιρέτες.
- Αντίστοιχα, τα $(0,2)$, $(0,3)$ είναι μηδενοδιαιρέτες
- $(0,2)\cdot(1,2) = (0,4) = (0,0) \Rightarrow (1,2)$: μηδενοδιαιρέτης
- $(1,1)$: μονάδα $\Rightarrow (1,1)$: αντιστρέψιμο
- $(1,3)\cdot(1,3) = (1,9) = (1,1) \Rightarrow (1,3)$: αντιστρέψιμο

▶ $\boxed{\text{Ασκηση}}$ Έστω R, S δακτύλιοι με μονάδα και έστω $f: R \to S$ είναι μη-μηδενικός ομομορφισμός δακτυλίων. Αν ο S **δεν** έχει διαιρέτες του μηδενός, δείξτε ότι:

$$\boxed{f(1_R) = 1_S}$$

▶ **Λύση**. Έχω: $f(1_R) = f(1_R \cdot 1_R) = f(1_R) f(1_R) = (f(1_R))^2$

$$\Rightarrow f(1_R)(f(1_R) - 1_S) = 0 \xRightarrow[\text{του μηδενός}]{\text{όχι διαιρέτες}} \boxed{f(1_R) = 0} \text{ ή } \boxed{f(1_R) = 1_S}$$

• Αν $\boxed{f(1_R)=0}$, τότε, για $\alpha \in R$, έχω:

$$f(\alpha) = f(\alpha \cdot 1_R) = f(\alpha)\cdot f(1_R) = \boxed{0}$$

Άτοπο, λόγω του ότι έχω μη-μηδενικό ομομορφισμό!!!

• Άρα: $\boxed{f(1_R) = 1_S}$.

⚠ Διαφορετική εκφώνηση: Νδο $f(1_R)=1_S$, αν f: επί.

▸ Λύση: $\left.\begin{array}{l} 1_S \in S \\ f \text{ επί} \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists\, b \in R)$ τ/ω: $\boxed{f(b) = 1_S}$

$$\Longrightarrow f(b\cdot 1_R) = f(b)\cdot f(1_R) = 1_S \Longrightarrow 1_S \cdot f(1_R) = 1_S$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(1_R) = 1_S}$$